Le Problème de Partage du Talmud

Frédéric Devernay

avril 1992

Le Talmud babylonien[1] donne trois solutions apparemment différentes au problème du partage. A partir d'un autre problème exposé dans le Talmud, dont la solution est plus simple à comprendre, et en s'aidant de la notion importante et logique de consistance, on comprend mieux le raisonnement utilisé pour la solution au premier problème.

1 Introduction

Le problème à étudier est le suivant:

Problème 1 *Un homme meurt, laissant des dettes* $d_1, \ldots, d_n$ *envers ses femmes dont le total représente plus que sa fortune* F*. Comment le capital doit-il être divisé entre les créancières?*

La solution qui nous paraît la plus logique aujourd'hui et qui est utilisée dans la loi moderne est celle du partage proportionnel aux dettes. Dans le partage proportionnel, chaque franc du capital est traité de la même façon et divisé entre les créancières. Cependant il n'est pas évident que cette méthode soit la seule qui soit équitable ou raisonnable. Ainsi, si le capital n'excède pas le montant de la plus petite dette, il semble normal que le capital soit divisé en parts égales entre les créancières. Toute partie de dette qui va au-delà du capital à partager n'a pas de raison d'être prise en compte : on ne peut pas avoir plus d'argent qu'il n'y en a de disponible.

Dans le Talmud, il y a ainsi une discussion sur un problème de partage entre trois créancières, veuves du même homme, qui réclament respectivement des dettes de 100, 200, et 300. La solution du partage est donnée pour trois montants différents du capital à partager, et les résultats sont en Figure 1. La première ligne du tableau semble correspondre à ce qu'on vient de dire : le capital n'excédant pas la plus petite dette, on procède à un partage égal du capital entre les veuves. La dernière ligne pourrait correspondre à un partage proportionnel, alors qu'on n'arrive pas au premier abord à saisir la logique qui a guidé le second partage.

Capital	*Dette*		
	100	200	300
100	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
200	50	75	75
300	50	100	150

Figure 1: L'exemple du Talmud

Ce Mishna[2] a été la source de discussions pendant plus de deux millénaires. Beaucoup le désaprouvent totalement, alors que d'autres attribuent ces résultats aberrants à des circonstances particulières. Quelques-uns ont tout-de-même essayé de trouver la raison de ces nombres, la plupart sans succès.

Nous allons donc essayer de trouver la logique de ce partage, et pour cela il faut revenir à un cas plus simple, pris lui-aussi dans le Talmud, celui du vêtement contesté.

2 Le vêtement contesté

Un Mishna célèbre[3] dit:

> Deux tiennent un vêtement; une le réclame entièrement, l'autre en réclame la moitié. Alors une reçoit $\frac{3}{4}$, et l'autre $\frac{1}{4}$.

La logique qui a gouverné ce principe est claire. La première en ne demandant que la moitié a concédé l'autre moitié à la seconde. Ce qui restait a alors été partagé entre les deux demandeuses. Ainsi si on appelle F la fortune à partager et d_1, d_2 les demandes de chacune, la partie de cette fortune concédée par i à l'autre demandeuse est la partie positive de $F - d_i$, qu'on notera:

$$(F - d_i)_+ = \max(F - d_i, 0).$$

Chacun concédant cette somme à l'autre, la somme restante est partagée entre les deux, et donc i reçoit

$$x_i = \frac{F - (F - d_1)_+ - (F - d_2)_+}{2} + (F - d_j)_+.$$

[1]Un document vieux de 2000 ans qui est la base de la loi juive.

[2]Le mot "Mishna" est à la fois utilisé pour désigner le texte entier sur lequel le Talmud est basé et des portions de celui-ci. Le même double sens existe pour le mot "loi" en français.

[3]Baba Metzia 2a

On dira de toute division qui se fait ainsi qu'elle suit le principe du vêtement contesté. On remarque facilement que ce principe est *monotone*, c'est-à-dire que pour d_1 et d_2 fixés, la somme reçue par chacune est une fonction croissante de la fortune F. En effet, en supposant $d_1 < d_2$, tant que $F < d_1$, chaque franc est divisé à part égale entre les créancières. Au-delà, seule celle qui demandait le plus reçoit de l'argent, jusqu'à ce qu'elle ait tout ce qu'elle avait demandé sauf $d_1/2$. Alors de nouveau chaque franc est divisé à part égale.

Ce probleme est différent du point de vue légal du problème de la succession, car la validité des demandes de chacune n'est pas certaine. Cependant en introduisant la notion de consistance, on arrive à faire le lien entre les deux problèmes, et on peut alors utiliser le principe VC (du vêtement contesté) pour le Problème 1.

3 La notion de consistance

Définition 1 *Un* problème de faillite *est une paire* (F, d)*, où* $d = (d_1, \ldots, d_n)$ *avec* $0 \leq d_1 \leq \ldots \leq d_n$ *et* $0 \leq F \leq d_1 + \ldots + d_n$*. Une solution à un tel problème est un n-uplet* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *de nombres réels tels que*

$$x_1 + \ldots + x_n = F. \tag{1}$$

Cette définition signifie que x_i est la partie de la succession qui est attribuée à i. Nous avons maintenant les éléments pour définir ce qu'est la consistance.

Définition 2 (Consistance avec VC) *Une solution est appelée* consistante avec VC *ou simplement* consistante*, si la division de* $(x_i + x_j)$ *suivant le principe du vêtement contesté avec les demandes* d_i *et* d_j *donne comme résultat* (x_i, x_j)*.*

Cela signifie en clair que les personnes i et j utilisent le principe du vêtement contesté pour se partager x_i+x_j. On vérifie facilement que les solutions de la Figure 1 sont consistantes avec VC.

Théorème 1 *Tout problème de faillite a une unique solution consistante.*

Nous allons d'abord prouver par l'absurde qu'il y a au plus une solution; supposons qu'il y ait deux solutions x et y distinctes, alors (1) implique qu'il existe i et j tels que $y_i > x_i$ et $y_j < x_j$. On peut poser également

$$y_i + y_j \geq x_i + x_j. \tag{2}$$

Il suffit en effet d'échanger les rôles de x et y si ce n'est pas vrai. Alors le principe du VC donne la quantité y_j à j lorsque le capital est $y_i + y_j$ et x_j à i lorsque le capital est $x_i + x_j$. La monotonie du VC et (2) impliquent que $y_j \geq x_j$, ce qui contredit les hypothèses. La solution est donc unique.

Nous allons maintenant exhiber une solution consistante, comme fonction de F à $d_1, \ldots, d_n$ fixés. Tant que F est plus petit que $d_1/2$, toutes se partagent F à parts égales. Dès que F dépasse $d_1/2$, 1 cesse de reçevoir de l'argent et les $(n-1)$ restantes se partagent chaque nouveau franc à parts égales. On continue jusqu'à ce que 2 ait reçu au total $d_2/2$, puis 2 cesse de recevoir, et les $n-2$ restantes se partagent chaque franc supplémentaire. On continue ainsi jusqu'à ce que chacune ait reçu la moitié de ce qu'elle demande, c'est-à-dire quand $F = D/2$, avec

$$D = d_1 + \cdots + d_n.$$

Quand F dépasse $D/2$, le raisonnement est le miroir du précédent; au commencement, seul n reçoit de l'argent, jusqu'à ce qu'elle ait reçu $d_n - d_{n-1}/2$. Alors chaque nouveau franc est partage entre $n-1$ et n, jusqu'à ce que chacune ait reçu $d_i - d_{n-2}/2$. Ensuite, $n-2$, $n-1$ et n se partagent chaque nouveau franc.

On peut également raisonner en termes de pertes. La perte de chacune est $d_i - x_i$, et la perte totale est $F - D$. Tant que la perte totale est petite, elle est partagée à parts égales (en perte, évidemment) entre les créancières jusqu'à ce que 1 ait perdu $d_1/2$. Alors 1 cesse de perdre, et ce sont les $n-1$ restantes qui se partagent chaque franc perdu. La suite du raisonnement est identique à celui utilisé quand $F \leq D/2$.

Pour prouver que cette solution est consistante, regardons de plus près ce qu'il se passe pour i et j, avec $d_i \leq d_j$. Tant que F est petit, i et j reçoivent des parts égales, et ceci jusqu'à ce que i ait reçu $d_i/2$. Alors seule j continue à recevoir de l'argent, jusqu'à ce que j ait reçu toute sa dette sauf $d_i/2$. Ensuite chacune des deux reçoit la même part de chaque nouveau franc, jusqu'à atteindre leurs dettes respectives. On voit alors très bien que cette méthode est consistante avec VC. Ceci achève la démonstration du Théorème 1.

Une autre forme de consistance est l'auto-consistance.

Définition 3 (Auto-consistance) *Une méthode* f *est appelée auto-consistante si pour tout sous-ensemble* S *de créancières,*

$$f(F; d) = x \Rightarrow f(x(S); d|S) = x|S,$$

où $x|S$ *signifie "restriction de* x *à* S*" et* $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$*.*

Cette définition signifie que tout sous-ensemble peut utiliser la méthode f pour se partager $x(S)$, et reçoit la même somme que si le partage avait été fait en appliquant la méthode f sur l'ensemble des créancières.

On peut montrer facilement que la méthode consistante avec VC est auto-consistante. En effet, la division suivant le principe du VC est valable quels que soient i et j, donc en particulier pour i et j appartenant à S.

La consistance avec VC et l'auto-consistance sont des notions totalement différentes. La première s'applique à une *solution particulière*, alors que l'auto-consistance s'applique à une *méthode*. On ne peut pas savoir en regardant une solution obtenue avec une certaine méthode si la méthode est auto-consistante, alors qu'on peut vérifier que la solution est consistante avec VC. De plus, il est évident que la méthode consistante avec VC n'est pas la seule méthode auto-consistante. On peut citer comme autres méthodes auto-consistantes la méthode de partage égal et celle de partage proportionnel, qui ont été vues dans la section 1.

4 La formation de coalitions

Parlant du Mishna de la Figure 1, le Talmud de Jerusalem raconte:

> Samuel dit que le Mishna suppose que les créancières se sont mises d'accord entre elles; en particulier, la troisième charge la seconde de traiter avec la première. Elle pourrait lui dire: "Tu demandes 100? Prends 50 et va."

Samuel veut dire que dans les cas $F = 200$ et $F = 300$, 2 et 3 forment une coalition contre 1. Il n'y a donc plus que deux protagonistes, avec des demandes valant 100 et $200 + 300 = 500$. On divise alors l'argent entre les deux, et 1 récupère 50, alors que les autres se partagent le reste.

Si on appliquait la même méthode au cas $F = 100$, on obtiendrait comme solution $(50, 25, 25)$. Or dans cette solution, l'ordre n'est pas préservé, et on s'apperçoit que l'ordre n'est préserve en gain et en perte que si $150 \leq F \leq 450$. Par exemple pour $F = 500$ on obtient $(50, 175, 275)$, et 1 perd plus que 2 ou 3. En fait, la solution préserve l'ordre initial si et seulement si $3d_1/2 \leq F \leq D - 3d_1/2$; de plus, si on partage les gains à parts égales pour $F \leq 3d_1/2$ et si on partage les pertes à parts égales pour $F \geq D - 3d_1/2$, on obtient exactement la solution consistante, quel que soit F avec $0 \leq F \leq D$.

Par induction, on généralise le résultat à n créancières. Supposons que nous connaissons la solution pour $(n-1)$ créancières, alors suivant les valeurs de F et de d, on pourra

1. Diviser F entre 1 et $2, \ldots, n$ suivant le principe du VC, pour le problème à deux créancières $(F; d_1, d_2 + \cdots + d_n)$, puis appliquer la solution pour $(n-1)$ créancières, que l'on connait par induction, pour diviser le montant attribué à la coalition $2, \ldots, n$ entre ses membres.

2. Partager les gains à parts égales entre les créancières.

3. Partager les pertes à parts égales entre les créancières.

En particulier, on applique 1 lorsque la solution obtenue préserve l'ordre, c'est-à-dire lorsque $n.d_1/2 < F < D - (n.d_1/2)$. On applique 2 lorsque $F \leq n.d_1/2$, et 3 lorsque $F \geq D - (n.d_1/2)$. Cette méthode est appelée la *procédure avec coalition.*

5 Implémentation

L'implémentation sur machine de la méthode consistante avec VC est très facile grâce à la procédure avec coalition. On suppose que les données du programme sont un vecteur $d = (d_1, \ldots, d_n)$ tel que $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ et la fortune à partager F. Les variables utilisées sont les vecteurs s et x et le réel D: s contient les sommes partielles de d, x est la solution, et D est la dette totale. Pour mieux comprendre, voici le programme lui-même:

debut
$s \leftarrow (\sum_{i=1}^{n} d_i, \ldots, d_{n-1} + d_n, d_n)$
pour i allant de 1 a $n-1$, faire
  $D \leftarrow s_i$
  si $F \leq (n+1-i)\frac{d_i}{2}$, alors *(calcul gains egaux)*
    pour tout $j \geq i$, faire
      $x_j \leftarrow \frac{F}{n+1-i}$
    $F \leftarrow x_n$
    fin
  si $F \geq D - (n+1-i)\frac{d_i}{2}$, alors *(calcul pertes egales)*
    pour tout $j \geq i$, faire
      $x_j \leftarrow d_j - \frac{F-D}{n+1-i}$
    $F \leftarrow x_n$
    fin
  sinon *(calcul VC)*
      $x_i \leftarrow \frac{F-(F-d_i)_+ + (F-s_{i+1})_+}{2}$
      $F \leftarrow \frac{F+(F-d_i)_+ - (F-s_{i+1})_+}{2}$
$x_n \leftarrow F$
fin

Voici un exemple de trace d'exécution pour $n = 5$, $d_i = 100i$, $F = 510$:

$F \leftarrow 510, d \leftarrow (100, 200, 300, 400, 500), s \leftarrow (1500, 1400, 1200, 900, 500)$

i	F	D	x	calcul
1	510	1500	$(50, 0, 0, 0, 0)$	VC
2	460	1400	$(50, 100, 0, 0, 0)$	VC
3	360	1200	$(50, 100, 120, 120, 120)$	gains égaux

Le listing en C du programme est donné en annexe.

6 Annexe

```
/* principle of the contested garment */
#include <stdio.h>

float plus(float a)
{
  if(a > 0)
```

```
    return(a);
  else
    return(0);
}

void mishna(float F, float *d, float *x, int n)
{
  float *s, D;
  int i,j;

  /* les indices des vecteurs vont de 0 a n-1, et non */
  /* pas de 1 a n, ce qui explique les modifications  */
  /* apportees au programme                           */
  s[n-1] = d[n-1];
  /* preparation du tableau des sommes partielles */
  for (i=n-2; i>=0; i--) {
    s[i] = s[i+1]+d[i];
  }
  /* debut de la boucle principale */
  i=0;
  while(i<n-1) {
    D = s[i];
    if( F <= ((n-i)*d[i]/2) ) { /* calcul gains egaux */
      F = F / (n-i);
      for(j=i; j<n; j++)
        x[j]=F;
      i=j; /* fin */
    }
    else {
      if( F >= (D-(n-i)*d[i]/2) ) {
        for(j=i; j<n; j++)
          x[j]=d[j]-(F-D)/(n-i);
        F = x[n-1];
        i=j; /* fin */
      }
      else {
        x[i] = (F - plus(F-d[i]) + plus(F-s[i+1])) / 2;
        F =  (F + plus(F-d[i]) - plus(F-s[i+1])) / 2;
      }
    }
    i++;
  }
  x[n-1] = F;
}

void pretty(float f, float *d, float *x, int n)
{
  int i;

  printf("Capital = %f\n",f);
  printf("Dettes = (");
  for(i=0;i<n-1;i++)
    printf("%f ,",d[i]);
  printf("%f)\n",d[n-1]);
  printf("Solution = (");
  for(i=0;i<n-1;i++)
    printf("%f ,",x[i]);
  printf("%f)\n",x[n-1]);
}

void main(int argc, char **argv)
{
  char *usage = "debtsfile estate";
  FILE *debtsf;
  int widows = 0;
  int i;
  float dummy, estate;
  float *d, *x, F;

  if (argc!=3) {
    fprintf(stderr,"Usage :%s %s\n",argv[0],usage);
    exit(-1);
  }

  F = atoi(argv[2]);
  debtsf = fopen(argv[1],"r");
  widows=0;
  while(fscanf(debtsf,"%f ",&dummy) == 1)
    widows++;
  fclose(debtsf);
  d = (float*)malloc(sizeof(float)*widows);
  debtsf = fopen(argv[1],"r");
  for (i=0; i < widows; i++) {
    fscanf(debtsf,"%f ",&d[i]);
  }
  x = (float*)malloc(sizeof(float)*widows);
  mishna(F, d, x, widows);
  pretty(F, d, x, widows);
}
```